Funktionsterme bestimmen

In den Pflichtteilen (manchmal auch in den Wahlteilen) kommt es vor, dass man aus den gegebenen Informationen einen Funktionsterm ermitteln muss.

Üblicherweise läuft das nach folgendem Schema ab:

- Erstelle aus den vorhandenen Informationen Gleichungen und erhalte so ein Gleichungssystem.
- Löse das Gleichungssystem.
- Die so gefundenen Werte für die Variablen führen dann zum gesuchten Funktionsterm.

Rechenbeispiel

Bestimme den Funktionsterm von f anhand folgender Angaben:

- f ist ganzrational 3ten Grades und berührt die x-Achse im Ursprung.
- $H(1|1)$ ist ein Hochpunkt.

Vorgehensweise:

Eine Funktion 3ten Grades hat allgemein die Form
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Gesucht sind also konkrete Werte für a, b, c und d.

Leite aus allen Infos aus der Aufgabe Gleichungen her und löse das entstehende Gleichungssystem. Das liefert schließlich $f(x)$.

Lösung

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \;\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

- f berührt die x-Achse im Ursprung, d.h. $(0|0)$ liegt auf dem Graphen von f, also gilt $f(0) = 0$, d.h. $\underline{d = 0}$.
- f berührt die x-Achse im Ursprung, d.h. f hat im Ursprung eine waagrechte Tangente, also gilt $f'(0) = 0$, d.h. $\underline{c = 0}$.
- $H(1|1)$ ist ein Hochpunkt, d.h. $(1|1)$ liegt auf dem Graphen von $f(x)$, also gilt $f(1) = 1$ und damit $a + b + c + d = 1$. Wegen $c = 0$ und $d = 0$ folgt $\underline{a + b = 1}$.
- $H(1|1)$ ist ein Hochpunkt, d.h. $f(x)$ hat im Punkt $(1|1)$ eine waagrechte Tangente, also gilt $f'(1) = 0$ und damit $3a + 2b + c = 0$. Wegen $c = 0$ folgt $\underline{3a + 2b = 0}$.

Lösung

Nun muss nur noch das folgende LGS gelöst werden:

$I. a + b = 1$ und $II. 3a + 2b = 0$.

Aus $I.$ erhält man $a = 1 - b$. Einsetzen in $II.$ liefert $3 \cdot (1 - b) + 2b = 0$ also $3 - b = 0$ und damit $b = 3$ und weiter $a = -2$.

Inzwischen haben wir $a = -2$, $b = 3$, $c = 0$ und $d = 0$.

Ergebnis:

Der gesuchte Funktionsterm lautet $\underline{f(x) = -2x^3 + 3x^2}$.

Pflichtteil 2015

Aufgabe 4:

Der Graph einer ganzrationalen Funktionen f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$.

Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

(4 VP)

PT 2015 – Lösung Aufgabe 4

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die Ableitung ist $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Die Aussage, dass f im Ursprung einen Hochpunkt hat, bedeutet sowohl I. $f(0) = 0$ als auch II. $f'(0) = 0$.

Damit folgt:

I. $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0$, also $\underline{d = 0}$ und

II. $3a \cdot 0 + 2b \cdot 0 + c = 0$, also $\underline{c = 0}$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

PT 2015 – Lösung Aufgabe 4

An der Stelle $x = 2$ hat f die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$.

Die Steigung dieser Tangente ist 4, somit gilt III. $f'(2) = 4$.

Setzen wir $x = 2$ in die Tangente ein, erhalten wir die y-Koordinate des Punktes auf dem Graphen von f, an dem die Tangente anliegt, also $y = -4$.

Somit gilt IV. $f(2) = -4$.

Wir erhalten unter Berücksichtigung von $c = d = 0$:

III. $12a + 4b = 4$ und IV. $8a + 4b = -4$

III. $-$IV. liefert $4a = 8$, also $\underline{a = 2}$.

Eingesetzt in IV. folgt $16 + 4b = -4 \Rightarrow 4b = -20 \Rightarrow \underline{b = -5}$.

Ergebnis: Die Funktionsgleichung für f lautet $\underline{f(x) = 2x^3 - 5x^2}$.